

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

La calculatrice est interdite

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

I - Chaîne d'oscillateurs et onde mécanique

Formulaire : Développement de Taylor d'une fonction $f(x)$ au voisinage de x_0 :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (x - x_0)^n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

I.1 - Oscillateur harmonique

Soit une molécule diatomique dont les deux atomes ne peuvent se déplacer que sur la direction (Ox) . En notant x la distance interatomique, l'énergie potentielle d'interaction s'écrit, selon la relation de Morse :

$$V(x) = V_0 [1 - e^{-a(x-x_0)}]^2$$

avec V_0 , a et x_0 des constantes réelles positives.

1) Déterminer la distance interatomique d'équilibre, appelée longueur de liaison à l'équilibre x_{eq} .

On s'intéresse aux petits mouvements autour de la position d'équilibre :

$$x(t) = x_{eq} + \varepsilon(t) \quad \text{avec} : |\varepsilon(t)| \ll x_{eq}$$

2) En développant l'énergie potentielle $V(x)$ au second ordre en ε , montrer que la force d'interaction résultante est équivalente à celle d'un ressort de constante de raideur k dont on donnera l'expression en fonction de V_0 et de a .

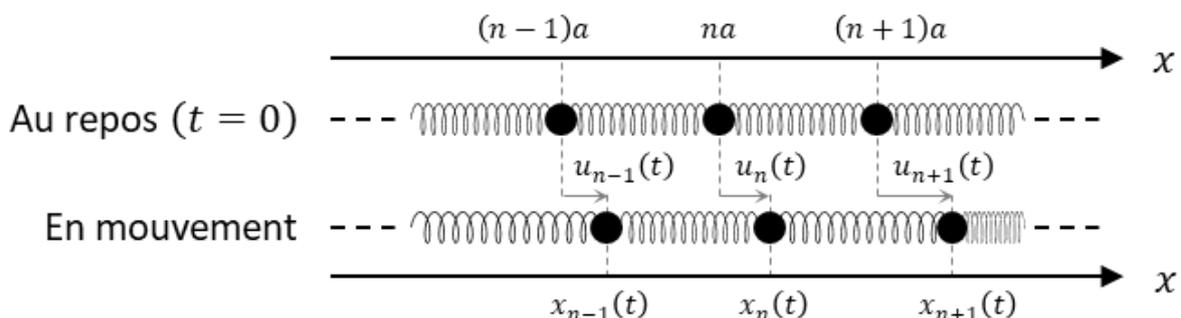
3) Si on appliquait cette force à une particule de masse m et de position $\varepsilon(t)$, quelle serait la pulsation des oscillations ω_0 de celle-ci ? Représenter la vibration au cours du temps $t \mapsto \varepsilon(t)$ pour des conditions initiales données : $\varepsilon(0) = \beta$ et $\dot{\varepsilon}(0) = 0$.

4) Donner, sur le même graphique, l'allure des courbes représentatives de l'énergie potentielle de Morse et de l'énergie potentielle harmonique approchée en fonction de la distance interatomique.

I.2 - Chaîne unidimensionnelle infinie d'oscillateurs harmoniques

On considère une chaîne unidimensionnelle infinie d'oscillateurs harmoniques identiques, de constante de raideur k et de longueur à vide a . Les masses sont toutes égales et désignées par des indices entiers successifs $n \in \mathbb{N}$. On note m cette masse des masselottes entre les ressorts, $x_n(t)$ l'abscisse de la $n^{\text{ième}}$ masse et $u_n(t)$ son déplacement par rapport à sa position d'équilibre.

On représente sur le schéma ci-dessous les notations pour les masses n° $n - 1$, n et $n + 1$.



Le référentiel est supposé galiléen. On ne prend en compte que les interactions harmoniques entre les masses. Initialement, à $t = 0$, la chaîne est au repos. La distance entre deux atomes successifs à l'équilibre est égale à la longueur à vide a .

On prend comme origine sur l'axe la position repérée par $n = 0$ à $t = 0$.

5) Pour $n \in \mathbb{N}$, écrire la position initiale de la $n^{\text{ième}}$ masse $x_n(0)$ en fonction de n et de a . En déduire son écart $u_n(t)$ par rapport à sa position d'équilibre en fonction de $x_n(t)$, n et de a .

6) Établir que l'équation du mouvement de la $n^{\text{ième}}$ masse, se met sous la forme :

$$\ddot{u}_n = \omega_0^2 [u_{n+1} + u_{n-1} - \alpha u_n]$$

avec α , constante réelle à déterminer.

On s'intéresse à la propagation d'ondes mécaniques dans cette chaîne. On cherche à savoir s'il existe un réel q strictement positif tel que, en notation complexe, on puisse écrire :

$$u_n(t) = U_0 e^{i(\omega t - qna)}$$

avec $i^2 = -1$, ω et U_0 strictement positifs.

7) Cette onde est-elle harmonique ? Que représentent U_0 et ω ?

Cette onde présente une périodicité spatiale s'il existe une $p^{\text{ième}}$ masse (avec $p > n$) telle que : $u_p(t) = u_n(t)$. On définit la longueur d'onde comme la plus petite distance séparant deux telles masses au repos.

8) Établir l'expression de la longueur d'onde λ en fonction de q . Que représente finalement q ?

I.3 - Solide cristallin

On considère ici un cristal parfait, c'est-à-dire un assemblage spatial triplement périodique d'un très grand nombre d'atomes. On admet que l'énergie potentielle de liaisons entre deux atomes de masse m , distants de x , sera modélisée par le potentiel de Lennard-Jones :

$$V(x) = \frac{A}{x^{12}} - \frac{B}{x^6} \quad \text{avec : } A, B \in \mathbb{R}_+^*$$

9) À quelles interactions correspondent les deux termes du potentiel de Lennard-Jones ?

10) En notant a , la distance entre deux atomes à l'équilibre, montrer que $V(x)$ se met sous la forme :

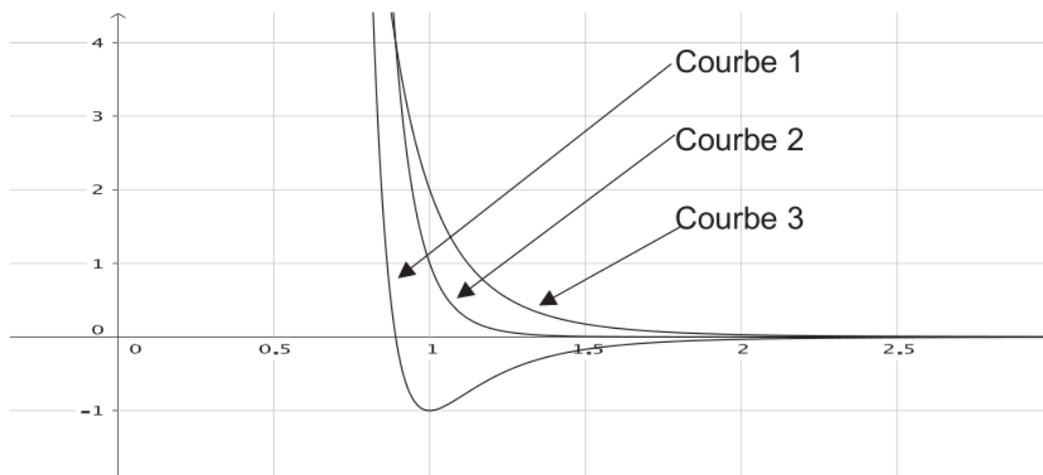
$$V(x) = V_0 \left[\left(\frac{a}{x}\right)^{12} - 2 \left(\frac{a}{x}\right)^6 \right]$$

où la profondeur du puits de potentiel V_0 est à exprimer en fonction de B et de a .

11) Sur le graphique ci-après, ont été représentées les courbes :

$$\frac{x}{a} \mapsto \frac{V(x)}{V_0} \quad \frac{x}{a} \mapsto \left(\frac{a}{x}\right)^{12} \quad \frac{x}{a} \mapsto 2 \left(\frac{a}{x}\right)^6$$

Identifier ces courbes.



12) Montrer que, tant que l'amplitude des oscillations reste négligeable devant a , la liaison entre deux atomes est modélisable par un ressort de constante de raideur k que l'on exprimera en fonction de V_0 et de a .

----- Fin de la partie I -----

II - Trajectoires de particules chargées

Données :

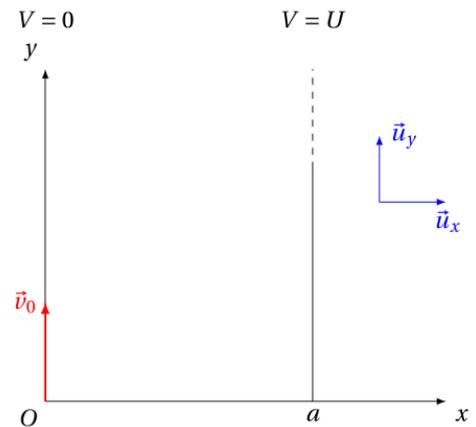
- Masse de l'électron : $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg
- Charge élémentaire : $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C

II.1 - Mouvement dans un champ électrique

Deux plans conducteurs parfaits infinis d'équation respective $x = 0$ et $x = a$ sont portés au potentiel respectif $V(x = 0) = 0$ et $V(x = a) = U$. L'espace interconducteur est le vide et on admet que le champ électrique $\vec{E} = E \vec{u}_x$ entre les conducteurs est uniforme.

Données : $|U| = 10$ kV (en valeur absolue) et $a = 1$ m.

- 13) Déterminer $V(x)$ entre les deux plans conducteurs. En déduire E .
- 14) Un électron entre à l'instant initial en $x = 0$ avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_y$ avec $v_0 > 0$. Montrer que son poids est négligeable devant la force électrique.
- 15) Préciser le signe de E ou de U afin pour que l'électron soit dévié vers les x positifs. Dans la suite, on suppose que cette condition est remplie.



16) Le conducteur en $(x, y) = (a, y_0)$ est percé par une très fine fente. Montrer que ce dispositif permet de sélectionner des électrons de vitesse v_0 donnée. Déterminer v_0 en fonction des paramètres de l'expérience.

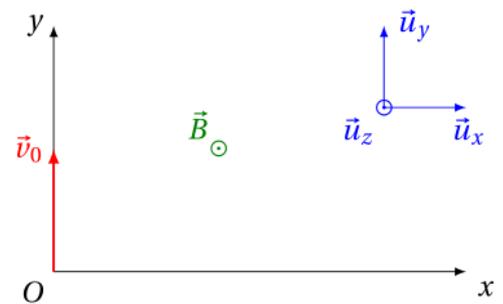
17) Exprimer alors la vitesse v_1 d'un électron passant par la fente en fonction de v_0 , e U et m .

II.2 - Mouvement dans un champ magnétique

À l'instant initial, l'électron est cette fois introduit à l'origine O du repère avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_y$ dans une région où règne un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B \vec{u}_z$. On supposera toujours son poids négligeable.

On pose $\omega_c = \frac{eB}{m}$ la pulsation cyclotron.

18) Calculer la puissance de la force magnétique. En déduire que le champ magnétique ne peut modifier la norme de la vitesse de l'électron.



19) Déterminer les équations différentielles vérifiées les coordonnées (x, y, z) de l'électron.

20) Montrer que l'électron reste dans le plan $z = 0$.

On fournit en fin d'exercice un code Python. Les questions 21 et 22 uniquement portent sur ce code.

21) En explicitant les lignes concernées du programme, expliquer son principe. Quelle méthode de résolution utilise-t-il ?

22) Compléter la ligne n°27 du programme afin que ce dernier affiche la trajectoire suivie par l'électron.

23) Montrer que la trajectoire de l'électron est circulaire et déterminer son rayon R .

On peut montrer que toute particule accélérée rayonne une puissance proportionnelle à la moyenne du carré de son accélération : $\mathcal{P} = K \langle a^2 \rangle$.

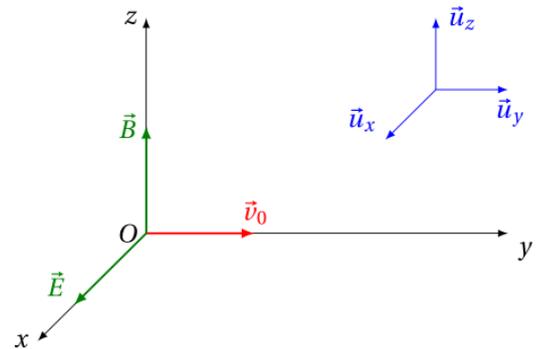
24) Déterminer \mathcal{P} sur la trajectoire de rayon R , en fonction de K , ω_c et v_0 .

25) Dans les anneaux de stockage des accélérateurs de particules, on conserve des particules accélérées en les maintenant sur des trajectoires circulaires. Suffit-il d'un champ magnétique uniforme et constant pour ce stockage ? Quelle solution proposeriez-vous ?

II.3 - Mouvement dans des champs électrique et magnétique

L'électron est désormais introduit à l'instant initial, à l'origine O du repère, avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_y$. Il pénètre dans une zone où règnent un champ électrique $\vec{E} = E \vec{u}_x$ et un champ magnétique $\vec{B} = B \vec{u}_z$.

26) Déterminer l'expression de v_0 pour que la trajectoire soit rectiligne. En déduire que le dispositif se comporte comme un sélectionneur de vitesse v_0 si on place une fente à un emplacement adéquate. Où faut-il placer la fente ?



Code Python (questions 21 et 22).

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 e = 1.6e-19
5 m = 9.1e-31
6 B = 1
7 ωc = e*B/m
8 v0 = 752
9 T = 2*np.pi/ωc
10 N = int(1e5)
11 dt = T/(N-1)
12
13 t = [0]
14 x = [0]

```

```

15 y = [0]
16 vx = [0]
17 vy = [v0]
18
19 for i in range(N):
20     t.append(t[i] + dt)
21     x.append(x[i] + vx[i]*dt)
22     y.append(y[i] + vy[i]*dt)
23     vx.append(vx[i] - ωc*vy[i]*dt)
24     vy.append(vy[i] + ωc*vx[i]*dt)
25
26 fig, ax = plt.subplots()
27 ax.plot() # à compléter

```

----- Fin de la partie II -----

I - Chaîne d'oscillateurs et onde mécanique

I.1 - Oscillateur harmonique

1) La position d'équilibre correspond à un minimum de l'énergie potentielle et vérifie donc l'équation :

$$V'(x_{eq}) = 0 \Rightarrow V_0 a e^{-a(x_{eq}-x_0)} [1 - e^{-a(x_{eq}-x_0)}] = 0 \Rightarrow \boxed{x_{eq} = x_0}$$

Il s'agit nécessairement d'un minimum car $V(x) \geq 0$ et $V(x_{eq}) = 0$.

2) Avec le changement de variable proposé :

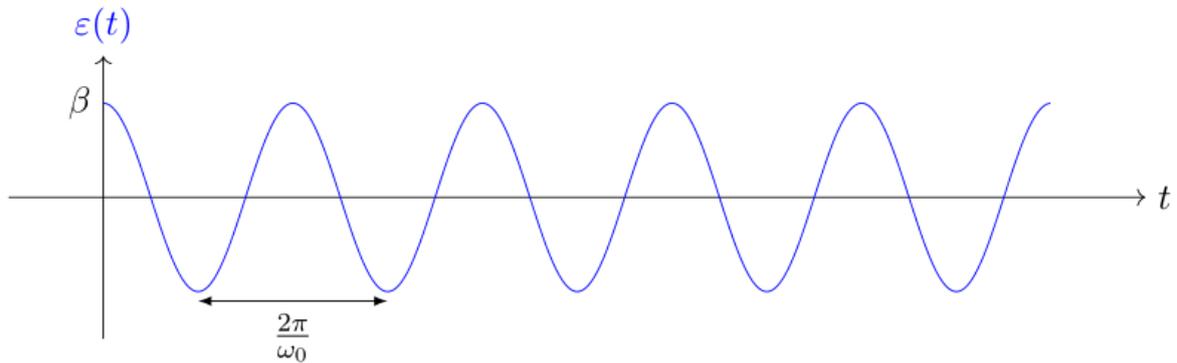
$$V(x) = V_0 [1 - e^{-a\varepsilon}]^2 \simeq V_0 a^2 \varepsilon^2 = \frac{1}{2} k \varepsilon^2$$

On obtient bien une énergie potentielle de la même forme que celle associée à un ressort avec $\boxed{k = 2a^2 V_0}$.

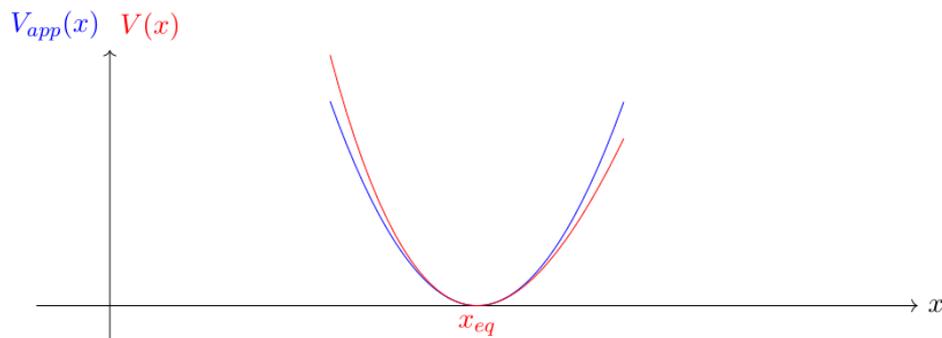
3) Le théorème de la puissance mécanique, appliqué à la particule de masse m dans un référentiel galiléen, donne l'équation différentielle :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x) \right) = 0 \Rightarrow \ddot{\varepsilon} + \frac{k}{m} \varepsilon = 0 \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

La résolution de cette équation donne : $\boxed{\varepsilon(t) = \beta \cos(\omega_0 t)}$



4) Dans le graphique suivant, $V(x)$ et $V_{app}(x)$ désignent respectivement le potentiel de Morse et son expression approchée.



I.2 - Chaîne unidimensionnelle infinie d'oscillateurs harmoniques

5) À l'équilibre, les atomes sont séparés d'une distance a et le choix de l'origine impose $x_0(0) = 0$ donc $\boxed{x_n(0) = na}$.

On en déduit $\boxed{u_n(t) = x_n(t) - na}$.

6) La masse d'indice n subit deux forces de rappel de la part :

- du ressort situé à sa gauche et de longueur $\ell_g(t) = x_n(t) - x_{n-1}(t)$
- du ressort situé à sa droite et de longueur $\ell_d(t) = x_{n+1}(t) - x_n(t)$

Le principe fondamental de la dynamique, appliqué à la masse d'indice n dans un référentiel galiléen, donne :

$$m \ddot{x}_n = -k(\ell_g(t) - a) + k(\ell_d(t) - a) \Rightarrow \boxed{\ddot{u}_n = \frac{k}{m}(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n)}$$

Donc $\boxed{\alpha = 2}$.

7) Il s'agit bien d'une onde harmonique puisqu'elle évolue temporellement de façon sinusoïdale. U_0 représente l'amplitude de l'onde et ω sa pulsation.

8) « On définit la longueur d'onde comme la plus petite distance séparant deux telles masses au repos. ». Donc :

$$\lambda = x_p(0) - x_n(0) = (p - n) a$$

De plus, la fonction exp est 2π -périodique (avec $p > n$) donc :

$$\underline{u}_p(t) = \underline{u}_n(t) \Rightarrow \omega t - qna = \omega t - qpa + 2\pi \Rightarrow p - n = \frac{2\pi}{qa}$$

On en déduit : $\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{q}}$

q représente donc le vecteur d'onde (noté k dans le cours sur les ondes).

I.3 - Solide cristallin

9) Le terme $-\frac{B}{x^6}$ correspond aux interactions attractives de Van der Waals prépondérantes à grande distance. Le terme $\frac{A}{x^{12}}$ correspond à des interactions répulsives entre les nuages électroniques des particules prépondérantes à courte distance.

10) Une étude de fonction montre immédiatement que $V(x)$ vaut $+\infty$ en $x = 0$, puis est strictement décroissante, passe par un minimum puis est strictement croissante et atteint 0^- en $x = +\infty$. La profondeur du puits est donc la valeur du minimum de la fonction (en valeur absolue).

$$V'(x = a) = 0 = -\frac{12A}{a^{13}} + \frac{6B}{a^7} \Rightarrow a = \left(\frac{2A}{B}\right)^{1/6}$$

La profondeur du puits vaut donc :

$$V_0 = -V(x = a) = -\frac{A}{\left(\frac{2A}{B}\right)^2} + \frac{B}{\left(\frac{2A}{B}\right)} = \frac{B^2}{4A} \Rightarrow \boxed{V_0 = \frac{B}{2a^6}}$$

11) Courbe 1 : $\frac{x}{a} \mapsto \frac{V(x)}{V_0}$ d'après ce qui précède. Courbe 2 : $\frac{x}{a} \mapsto \left(\frac{x}{a}\right)^{12}$ qui doit décroître plus rapidement que la courbe 3 : $\frac{x}{a} \mapsto 2\left(\frac{x}{a}\right)^6$.

12) On pose ε tel que $x(t) = a + \varepsilon(t)$ avec $|\varepsilon(t)| \ll a$. On fait un DL à l'ordre 2 du potentiel. Rappel : $(1 + h)^\alpha \simeq 1 + \alpha h + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} h^2$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} V(x) &= V_0 \left[\left(\frac{a}{a+\varepsilon}\right)^{12} - 2\left(\frac{a}{a+\varepsilon}\right)^6 \right] = V_0 \left[\left(1 + \frac{\varepsilon}{a}\right)^{-12} - 2\left(1 + \frac{\varepsilon}{a}\right)^{-6} \right] \\ &\simeq V_0 \left[1 - 12 \frac{\varepsilon}{a} + 78 \left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^2 - 2 \left(1 - 6 \frac{\varepsilon}{a} + 21 \left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^2 \right) \right] \\ &= V_0 \left[-1 + 36 \left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^2 \right] \\ &= -V_0 + 36 \frac{V_0}{a^2} (x - a)^2 \end{aligned}$$

On reconnaît l'énergie potentielle d'un ressort avec : $k = \frac{72 V_0}{a^2}$.

Remarque : on peut aussi utiliser directement le résultat de cours :

$$k = V''(x = a) = \frac{V_0}{a^2} (12 \cdot 13 - 2 \cdot 6 \cdot 7) = \frac{72 V_0}{a^2}$$

----- Fin de la partie I -----

II - Trajectoires de particules chargées

II.1 - Mouvement dans un champ électrique

13) On rappelle la relation entre E (qui de plus ici est uniforme, donc $E = cte$) et V :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V) \Rightarrow E = cte = -\frac{dV}{dx} \Rightarrow V(x) = \frac{Ux}{a} \Rightarrow \boxed{E = -\frac{U}{a}}$$

14) En ordre de grandeur des normes des forces :

$$P = mg \sim 10^{-30} \cdot 10 \sim 10^{-29} \text{ N} \quad \text{et} \quad F_{el} = eE \sim 10^{-19} \cdot \frac{10^4}{1} \sim 10^{-15} \text{ N}$$

On a bien $\boxed{P \ll F_{el}}$.

15) Le PFD sur l'électron dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen donne : $m\vec{a} = -e\vec{E}$

On veut une accélération selon $+\vec{u}_x$, il faut donc que \vec{E} soit selon $-\vec{u}_x$ et donc que $\boxed{U > 0}$.

16) Le PFD donne :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \frac{eU}{a} \\ m\dot{y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \frac{eU}{ma} t \\ \dot{y} = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{eU}{2ma} t^2 \\ y = v_0 t \end{cases}$$

On souhaite que la trajectoire passe par le point $(x, y) = (a, y_0)$. Cela se produit au temps :

$$t = \frac{y_0}{v_0} \Rightarrow a = \frac{eU}{2ma} \left(\frac{y_0}{v_0}\right)^2 \Rightarrow \boxed{v_0 = \frac{y_0}{a} \sqrt{\frac{eU}{2m}}}$$

Cela se produit pour une unique valeur de v_0 . Ce dispositif permet donc bien de sélectionner des électrons de vitesse v_0 donnée par la formule ci-dessus.

17) La vitesse de sortie vaut alors :

$$\boxed{v_1 = \sqrt{v_0^2 + \left(\frac{eUy_0}{mav_0}\right)^2} = \sqrt{v_0^2 + \frac{2eU}{m}}}$$

On peut également obtenir ce résultat par conservation de l'énergie mécanique (TEM) :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 - eU \Rightarrow \boxed{v_1 = \sqrt{v_0^2 + \frac{2eU}{m}}}$$

II.2 - Mouvement dans un champ magnétique

18) On a : $\mathcal{P}_{mag} = (-e\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0$ car $\vec{v} \wedge \vec{B}$ est \perp à \vec{v} . D'après le TPC, l'énergie cinétique est constante et donc la norme de \vec{v} est constante.

19) On applique le PFD à l'électron.

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = -e \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \ddot{x} = -\omega_c \dot{y} \\ \ddot{y} = \omega_c \dot{x} \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}}$$

20) La dernière équation donne (avec les CI) : $\ddot{z} = 0 \Rightarrow \dot{z} = 0 \Rightarrow \boxed{z = 0}$

21) On a :

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{x(t+dt) - x(t)}{dt} \\ \dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{y(t+dt) - y(t)}{dt} \\ \ddot{x} = -\omega_c \dot{y} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{\dot{x}(t+dt) - \dot{x}(t)}{dt} \\ \ddot{y} = \omega_c \dot{x} = \frac{d\dot{y}}{dt} = \frac{\dot{y}(t+dt) - \dot{y}(t)}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t+dt) = x(t) + \dot{x}(t) \cdot dt \\ y(t+dt) = y(t) + \dot{y}(t) \cdot dt \\ \dot{x}(t+dt) = \dot{x}(t) - \omega_c \dot{y}(t) \cdot dt \\ \dot{y}(t+dt) = \dot{y}(t) + \omega_c \dot{x}(t) \cdot dt \end{cases}$$

Interprétation du code :

- Lignes 1 à 2 : import des bibliothèques.
- Lignes 4 à 11 : définitions des paramètres. Le mouvement est T -périodique. On va la décrire par N points, séparés par $N - 1$ intervalles de temps dt .
- Lignes 13 à 17 : conditions initiales sur x , y , \dot{x} et \dot{y} .
- Lignes 19 à 24 : résolution des ED par la **méthode d'Euler** (cf. expressions ci-dessus).
- Lignes 26 à 27 : affichage du graphique.

22) `ax.plot(x, y)`

23) PFD, dans la base de Frenet, avec la norme de $v = v_0 = cte$:

$$m \underbrace{\vec{a}}_{=0} = m \frac{dv_0}{dt} \vec{u}_{\parallel} + \frac{mv_0^2}{R} \vec{u}_{\perp} = -e \vec{v} \wedge \vec{B} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{R} = ev_0 B \Rightarrow \boxed{R = \frac{mv_0}{eB} = \frac{v_0}{\omega_c}}$$

Le rayon de courbure de la trajectoire est constant, donc c'est un cercle.

24) On a : $\boxed{\mathcal{P} = K \langle a^2 \rangle = K \left(\frac{v_0^2}{R} \right)^2 = K (v_0 \omega_c)^2}$

25) On vient de montrer que dans un anneau de stockage, la particule va perdre de l'énergie (donc de la vitesse) par rayonnement. Un champ magnétique seul ne suffit pas. Il faut également un champ électrique pour maintenir une vitesse constante.

II.3 - Mouvement dans des champs électrique et magnétique

26) Le PFD donne :

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = -e \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} - e \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = -eB \dot{y} - eE \\ \ddot{y} = eB \dot{x} \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

On veut un mouvement rectiligne, donc : $x = 0$ et $z = 0$. Ceci implique que :

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \ddot{x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{y} = 0 \\ 0 = -eB \dot{y} - eE \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{y} = cte = v_0 \\ 0 = Bv_0 + E \end{cases} \Rightarrow \boxed{v_0 = -\frac{E}{B}}$$

Pour les particules qui ont précisément cette vitesse, le mouvement est parfaitement rectiligne. Une fente placée sur l'axe (Oy) permet donc de sélectionner ces particules. Plus la fente est placée loin de l'origine, plus la sélection sera précise (en effet, une particule de vitesse très légèrement différent de v_0 ne sera que très légèrement déviée et pourrait tout de même passer dans la fente si cette dernière est placée trop proche de l'origine).

----- Fin de la partie II -----